Exercice n° 1

- $a = 3 - 4i$, posons $b = x + iy$

$b^2 = a$ signifie $\begin{cases} x^2 - y^2 = Re(a) = 3 \\ x^2 + y^2 = |a| = 5 \\ x.y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ x.y < 0 \end{cases}$

Donc $x = \pm 2$ et $y = \mp 1$

D'où les racines carrées de $3 - 4i$ sont :

$b_0 = 2 - i$ et $b_1 = -2 + i$

- $a = 2i$

On a : $(1 + i)^2 = 2i$ par suite les racines carrées de $2i$ sont : $b_0 = 1 + i$ et $b_1 = -1 - i$

- $a = -5 - 12i$, posons $b = x + iy$

$b^2 = a$ signifie $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ x.y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ x.y < 0 \end{cases}$

Donc $x = \pm 2$ et $y = \pm 3$

D'où les racines carrées de $(-5 - 12i)$ sont :

$b_0 = 2 - 3i$ et $b_1 = -2 + 3i$

- $a = \dfrac{2i - 1}{i + 2}$

Déterminons l'écriture algébrique de a :

$$a = \frac{2i-1}{i+2} = \frac{(2i-1).(-i+2)}{5} = \frac{2+4i+i-2}{5} = i$$

Or on a : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ d'où les racines carrées de a sont

$e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $-e^{i\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $a = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

D'où les racines carrées de a sont : $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

- $a = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

D'où les racines carrées de a sont :

$\sqrt{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et $\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{9\pi}{8}}$

Exercice n° 2

- $a = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc les racines cubiques de a sont :

$Z_k = r\,e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 8$ et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 8$ Signifie $r = 2$

Donc on aura :

$\underline{k = 0}$: $Z_0 = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$

$\underline{k = 1}$: $Z_1 = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$

$\underline{k = 2}$: $Z_2 = 2\,e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$

- $a = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Donc les racines cubiques de a sont :

$Z_k = r\,e^{i(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 2$ et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 2$ Signifie $r = \sqrt[3]{2}$ (voir analyse)

Donc on aura :

$\underline{k = 0}$: $Z_0 = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{\pi}{18}}$

$\underline{k = 1}$: $Z_1 = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{13\pi}{18}}$

$\underline{k = 2}$: $Z_2 = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{25\pi}{18}} = \sqrt[3]{2}\,e^{-i\frac{11\pi}{18}}$

- $a = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Donc les racines cubiques de a sont :

$Z_k = r\,e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $r^3 = 1$ et $k \in \{0,1,2\}$

On a : $r^3 = 1$ Signifie $r = 1$

Donc on aura :

$\underline{k = 0}$: $Z_0 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

$\underline{k = 1}$: $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$\underline{k = 2}$: $Z_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Exercice n° 3

a) On a : $(2 - i)^3 = 2^3 - 3x\,2^2x\,i + 3x2x\,i^2 - i^3$

$= 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

$\boxed{(2 - i)^3 = 2 - 11i}$

Donc $2 - i$ est une racine cubique de $2 - 11i$

b) soit z tel que : $z^3 = 2 - 11i$

Or $(2 - i)^3 = 2 - 11i$ d'où $\dfrac{z^3}{(2-i)^3} = 1$ **(E)**

On posons $Z = \dfrac{z}{2 - i}$ l'équation **(E)**

Devienne $Z^3 = 1$ **(E')**

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn